הנדסה פיננסית באמצעות שפת Python: נוסחת Black & Scholes לתמחור אופציות

ניתן להשתמש בנוסחה שנגזרה על ידי Black and Scholes (1973) על מנת להעריך את שווייה של אופציה אירופאית על מניה שאינה מחלקת דיבידנד לפני מועד הפקיעה של האופציה. נוסחת Black & Scholes לתמחור אופציות נגזרת במקור בהתבסס על נכס בסיס S שעוקב תנועה בראון גיאומטרית (geometric Brownian motion):

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

כאשר μ הוא שיעור התשואה הרגעי (instantaneous) הצפוי של נכס הבסיס, σ היא התנודתיות הרגעית של שיעור התשואה, ו- dz הוא תהליך וינר (Wiener process). נוסחת Black-Scholes יכולה לשמש גם לתמחור אופציות רכש (call) אמריקאיות על מניה שמחלקת דיבידנד, מאחר ולעולם לא יהיה זה אופטימלי לממש את אופציה שכזו לפני הפקיעה. אם נסמן ב- c את מחירה של אופציית רכש אירופאית וב- p את מחירה של אופציית מכר (put) אירופאית, הרי שנוסחת Black-Scholes גורסת כי:

$$c = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$$

$$p = Xe^{-rT}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

כאשר

$$d_1 = \frac{ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{ln(S/X) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

S = מחיר המניה.

X = מחיר המימוש של האופציה.

r = שיעור הריבית חסרת הסיכון.

Office: +972.77.507.0590 ■ Cell: +972.52.598.1668 ■ www.intrinsicvalue.co.il ■ polanitz6@gmail.com

Intrinsic Value
Independent Business Appraisers
Recognize. Measure. Present the Result.

T = הזמן עד לפקיעה בשנים.

σ = התנודתיות של השינויים היחסיים במחיר נכס הבסיס.

$N(x)$ = פונקציית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית עד לנקודה x.

דוגמא

נניח אופציית רכש (call) אירופאית עם שלושה חודשים לפקיעה. מחיר המניה הוא 60, מחיר המימוש הוא 65, שיעור הריבית חסרת הסיכון הוא 8% לשנה והתנודתיות היא 30% לשנה. לפיכך:

$$S = 60\,, X = 65, T = 0.25, r = 0.08, \sigma = 0.3$$

$$d_1 = \frac{ln(60/65) + (0.08 + 0.3^2/2)0.25}{0.3\sqrt{0.25}} = -0.3253$$

$$d_2 = d_1 - 0.3\sqrt{0.25} = -0.4753$$

על מנת לחשב את $N(\cdot)$ יש לייבא (Import) את ספריית scipy.stats ולהשתמש בפונקציית norm.cdf הנמצאת בספריה זו.

$$N(d_1) = N(-0.3253) = 0.3725 \quad N(d_2) = N(-0.4753) = 0.3173$$

$$c = 60N(d_1) - 65e^{-0.08\times 0.25}N(d_2) = 2.1334$$

קוד ה-Python שפיתח האקטואר רועי פולניצר עבור אופציית רכש (Call)

```
[6] import numpy as np
    import scipy.stats as si
    def PolanitzerBlackScholesCall(S,X,r,T,v):
      d1 = (np.log(S/X)+(r+0.5*v**2)*T)/(v*np.sqrt(T))
      d2 = (np.log(S/X)+(r-0.5*v**2)*T)/(v*np.sqrt(T))
      PolanitzerBlackScholesCall = S*si.norm.cdf(d1,0.0,1.0)-X*si.norm.cdf(d2,0.0,1.0)*np.exp(-r*T)
      print(PolanitzerBlackScholesCall)
```

```
PolanitzerBlackScholesCall(60,65,0.08,0.25,0.3)
```

```
2.1333684449162007
```

קוד ה-Python שפיתח האקטואר רועי פולניצר עבור אופציית מכר (Put)

```
[10] import numpy as np
     import scipy.stats as si
     def PolanitzerBlackScholesPut(S,X,r,T,v):
       d1 = (np.log(S/X)+(r+0.5*v**2)*T)/(v*np.sqrt(T))
       d2 = (np.log(S/X)+(r-0.5*v**2)*T)/(v*np.sqrt(T))
       PolanitzerBlackScholesPut = X*si.norm.cdf(-d2,0.0,1.0)*np.exp(-r*T)-S*si.norm.cdf(-d1,0.0,1.0)
       print(PolanitzerBlackScholesPut)
```

```
[11] PolanitzerBlackScholesPut(60,65,0.08,0.25,0.3)
```

```
5.846282209855289
```

משוואת ההפרשים החלקית (PDE) של Black-Scholes

דרך חלופית למצוא את שווי האופציה על בסיס נוסחת Black-Scholes היא לפתור את משוואת ההפרשים החלקית (PDE- Partial Differential Equation) של Black-Scholes. ניתן לעשות זאת בצורה מספרית באמצעות מספר שיטות שונות. ה-PDE של Black-Scholes הינה:

$$\left[\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 S^2+r\frac{\partial c}{\partial S}S\right]dt=rc$$

למעשה נוסחת Black-Scholes היא פיתרון סגור (closed-form) ל- PDE המונח לעיל בהינתן פונקציית התזרים (payoff function, תנאי הגבול) של אופציית ונילה.

פירמת הייעוץ שווי פנימי מסייעת ללקוחותיה לפתח וליישם מודלים מתקדמים הדורשים הבנה עמוקה בתהליכים סטוכסטיים, ידע בשיטות נומריות ושליטה ברמה גבוהה בשפות תכנות כגון: Python ו- R.

הצוות שלנו כולל מומחה לשוק ההון וניהול סיכונים בעל תארים בכלכלה ומימון (BA ו-MBA) עם ניסיון רב הן בפיתוח, יישום ותיקוף מודלים כמותיים.

האקטואר רועי פולניצר, בעל הסמכות מתקדמות בניהול סיכונים פיננסיים (CRM ו- FRM), מייעץ לחברות בניתוחים כמותיים מתקדמים בתחומים של הנדסה פיננסית, יישום מודל מונטה-קרלו, תהליכים סטוכסטיים ופתרון בעיות כמותיות באמצעות שיטות נומריות מתקדמות.

לאקטואר פולניצר שליטה בשפת התכנות וניתוח הנתונים Python, השלטת כיום בעולמות ה- Data, הכוללת את יסודות השפה (מנושאי תחביר פשוטים ועד מודולים ייחודיים לשפה זו), מה שהופך אותו למפתח Python לכל דבר ועניין, ברמה הנדרשת בתעשיה בכלל ובעולמות ה- Data בפרט. בנוסף, האקטואר פולניצר הינו מרצה בקורסים והשתלמויות מקצועיות של לשכת מעריכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל (IAVFA) בשפת Python.