

נוסחת בייס

לפעמים בלמידת מכונה אנו מעוניינים לאמוד את ההסתברות לקבלת תוצאה מסוימת מתוך נתונים. התוצאה יכולה להיות לקוח שמגיע לחדלות פירעון על הלוואה מסוימת או עסקה שמתבררת כעסקת הונאה. על פי רוב, קיימת הסתברות א-פריורית (התחלתית) מסוימת לקבלת התוצאה. כאשר מגיע מידע חדש, ההסתברות מתעדכנת להסתברות המותנית (Conditional) באמצעות נוסחת בייס (Bayes Theorem). נוסחת בייס משמשת לחישוב הסתברויות מותנות.

תומאס בייס הציג את נוסחת בייס בערך בשנת 1760. נסמן ב- $P(X)$ את ההסתברות לקרות מאורע X וב- $P(Y|X)$ את ההסתברות המותנית לקרות מאורע Y מותנה בכך שמאורע X קרה. נוסחת בייס גורסת כי-

$$P(Y|X) = \frac{P(X|Y)P(Y)}{P(X)}$$

ההוכחה של נוסחת בייס היא די אינטואיטיבית. מתוך המשמעות של הסתברויות מותנות:

$$P(Y|X) = \frac{P(X \text{ and } Y)}{P(X)}$$

וגם

$$P(X|Y) = \frac{P(X \text{ and } Y)}{P(Y)}$$

אם נבטא את שתי המשוואות לעיל באמצעות $P(X \text{ and } Y)$ ונשווה ביניהן, נקבל את נוסחת בייס.

נניח שבנק מסוים מנסה לזהות לקוחות שמנסים לבצע עסקאות הונאה בסניפיו. נניח ש- 90% מעסקאות ההונאה הן מעל ל- 100,000 ש"ח ומתבצעות בין 4 אחה"צ ל- 5 אחה"צ. עוד נניח כי רק 1% מהעסקאות הן עסקאות הונאה ו- 3% מכל העסקאות הן מעל ל- 100,000 ש"ח ומתבצעות בין 4 אחה"צ ל- 5 אחה"צ.

במקרה שכזה נגדיר:

X : עסקאות מעל ל- 100,000 ש"ח שמתבצעות בין 4 אחה"צ ל- 5 אחה"צ.

Y : עסקאות הונאה.

אנחנו יודעים ש- $P(Y) = 0.01$, $P(X|Y) = 0.90$ ו- $P(X) = 0.03$ ש-

מתוך נוסחת בייס:

$$P(Y|X) = \frac{P(X|Y)P(Y)}{P(X)} = \frac{0.90 \times 0.01}{0.03} = 0.3$$

ההסתברות שעסקה מקרית מסוימת היא עסקת הונאה היא רק 1%. אבל כאשר ידוע שאותה עסקה היא מעל ל- 100,000 ש"ח ושהיא התבצעה בין 4 אחה"צ ל- 5 אחה"צ, או אז נוסחת בייס מעדכנת את ההסתברות מ- 1% ל- 30%. המשמעות של זה היא ברורה. אם לבנק יש מערכת לאישור עסקאות ב- Online, הרי שהיא אוטומטית לא צריכה לאשר עסקאות שהן מעל ל- 100,000 ש"ח ושמתבצעות בין 4 אחה"צ ל- 5 אחה"צ.

נוסחת בייס מאפשרת לנו לחשב הסתברויות מותנות. לפעמים נוסחת בייס מייצרת תוצאות שנוגדות את האינטואיציה. נניח שמבחן לגילוי מחלה מסוימת הוא "מדויק ב- 99%". לאמור- כאשר לבנאדם מסוים יש את המחלה, אזי המבחן מספק תוצאה חיובית (קרי, הוא מנבא/חוזר שלבנאדם יש את המחלה) ב- 99% מהזמן. אנו מניחים גם שכאשר לבנאדם אין את המחלה, אז המבחן מספק תוצאה שלילית (קרי, הוא מנבא/חוזר שלבנאדם אין את המחלה) ב- 99% מהזמן. נניח שהמחלה היא כל כך נדירה כך שההסתברות (הלא מותנית) שלבנאדם יש את המחלה היא 1 מתוך 10,000 או 0.0001. נניח שעשית את המבחן והתוצאה יצאה חיובית, מהי ההסתברות שיש לך את המחלה?

התשובה הטבעית לשאלה זו היא 99%. (אחרי הכל, המבחן מדויק ב- 99%). עם זאת, תוצאה זו לא עולה בקנה אחד עם נוסחת בייס. נניח ש- X מצביע על כך שתוצאת המבחן היא חיובית וש- Y מצביע על כך שלבנאדם יש את המחלה. אנחנו מעוניינים למעשה ב- $P(Y|X)$.

אנחנו יודעים ש- $P(X|Y) = 0.99$ וש- $P(Y) = 0.0001$. כעת נרחיב את הסימונים שלנו כך ש- \bar{X} מצביע על כך שתוצאת המבחן היא שלילית וש- \bar{Y} מצביע על כך שלבנאדם אין את המחלה. אנו יודעים גם ש- $P(\bar{Y}) = 0.9999$ וש- $P(\bar{X}|\bar{Y}) = 0.99$.

מאחר ו- $P(\bar{X}|\bar{Y}) + P(X|\bar{Y}) = 1$ הרי ש-

$$P(X|\bar{Y}) = 0.01$$

ואז אנחנו יכולים למעשה לחשב את ההסתברות שהמבחן יספק תוצאה חיובית כ-

$$P(X) = P(X|Y)P(Y) + P(X|\bar{Y})P(\bar{Y})$$

$$P(X) = 0.99 \times 0.0001 + 0.01 \times 0.9999 = 0.0101$$

באמצעות נוסחת בייס:

$$P(Y|X) = \frac{P(X|Y)P(Y)}{P(X)} = \frac{0.99 \times 0.0001}{0.0101} = 0.0098$$

מכאן עולה שיש פחות מ- 1% סיכוי שיש לך את המחלה אם תוצאת המבחן היא חיובית. תוצאת המבחן מגדילה הלכה למעשה את ההסתברות שיש לך את המחלה פי 98 (במקרה דגן שלפנינו כמובן), מהסתברות לא מותנית של 0.0001 להסתברות מותנית של 0.0098 (אבל עדיין הסתברות נמוכה). הנקודה העיקרית היא שרמת הדיוק מוגדרת באמצעות ההסתברות לקבל את התוצאה הנכונה בהינתן שלבנאדם מסוים יש את המחלה, אך לא להיפך.



פרטים אודות כותב המאמר: מדען הנתונים רועי פולניצר, PDS

- מייסד ומנכ"ל האיגוד הישראלי למדעני נתונים מקצועיים (PDSIA), מייסד ויו"ר לשכת מעריכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל (IAVFA) ובעלים של פירמת הייעוץ וההדרכה שווי פנימי.
- מחזיק בתואר M.B.A. במנהל עסקים עם התמחות בניהול סיכונים ואקטואריה ותואר B.A. בכלכלה עם התמחות במימון שניהם בהצטיינות מאוניברסיטת בן-גוריון בנגב, דיפלומה בניהול סיכונים פיננסיים (FRM) מאוניברסיטת אריאל, תואר Financial Risk Manage מארגון בינ"ל GARP, תואר Certified Risk Manage מארגון ישראלי IARM, תואר Fellow Actuary מארגון ישראלי IAVFA ותואר Professional Data Scientist מארגון ישראל PDSIA.
- בעל ניסיון אינטנסיבי של מעל עשור וחצי שנים בתחום מדע הנתונים ולמידת המכונה, הכולל ביצוע מחקרי מידע מעמיקים לשם הפקת תובנות עסקיות, ניקוי, טיוב וסידור של המידע המשמש למחקרים השונים, הפעלת אלגוריתמים שונים של מידול, כריית נתונים ו-Machine Learning על המידע ובניית תהליכי הכנת המידע והאופטימיזציה של האלגוריתמים השונים.
- מרצה לתכנות בשפות R ו-Python, לניהול סיכונים, הערכות שווי ואקטואריה והנדסה פיננסית.