הנדסה פיננסית באמצעות שפת Python: אופציות על חוזים עתידיים

הנוסחה של Black (1976) נותנת את המחיר של אופציות אירופיות כאשר נכס הבסיס הוא עסקת אקדמה (forward contract) או חוזה עתידית (futures contract) עם מחיר התחלתי F:

$$c = e^{-rT}[FN(d_1) - XN(d_2)]$$

$$p = e^{-rT}[XN(-d_2) - FN(-d_1)]$$

כאשר

$$d_1 = \frac{ln(F/X) + (\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{ln(F/X) - (\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

F = המחיר העתידי של נכס הבסיס.

X = מחיר המימוש של האופציה.

T = הזמן עד לפקיעה בשנים.

σ = התנודתיות של השינויים היחסיים במחיר נכס הבסיס.

$N(x)$ = פונקצית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית עד לנקודה x.

Office: +972.77.507.0590 ■ Cell: +972.52.598.1668 ■ www.intrinsicvalue.co.il ■ polanitz6@gmail.com

דוגמא

נניח אופציה אירופאית על עתידית על חבית נפט עם תשעה חודשים לפקיעה. מחיר העתידית הוא 19 דולר ארה״ב, מחיר המימוש הוא 19 דולר ארה״ב, שיעור הריבית חסרת הסיכון הוא 10% לשנה והתנודתיות היא 28% לשנה. לפיכך:

$$F = 19\,, X = 19\,, T = 0.75\,, r = 0.1, \sigma = 0.28$$

$$d_1 = \frac{ln(19/19) + (0.28^2/2)0.75}{0.28\sqrt{0.75}} = 0.1212$$

$$d_2 = d_1 - 0.28\sqrt{0.75} = -0.1212$$

על מנת לחשב את N(·) יש לייבא (Import) את ספריית scipy.stats ולהשתמש בפונקציית norm.cdf הנמצאת בספריה זו.

$$N(d_1) = N(0.1212) = 0.5483 \quad N(d_2) = N(-0.1212) = 0.4517$$

$$N(-d_1) = N(-0.1212) = 0.4517 \quad N(-d_2) = N(0.1212) = 0.5483$$

$$c = e^{-0.1\times0.75}[19N(d_1) - 19N(d_2)] = 1.7011$$

$$p = e^{-0.1\times0.75}[19N(-d_2) - 19N(-d_1)] = 1.7011$$

קוד ה-Python שפיתח האקטואר רועי פולניצר עבור אופציית רכש (Call)

```
[8]  import numpy as np
     import scipy.stats as si
     def PolanitzerBlack_76_Call(F,X,r,T,v):
       d1 = (np.log(F/X)+(0.5*v**2)*T)/(v*np.sqrt(T))
       d2 = (np.log(F/X)-(0.5*v**2)*T)/(v*np.sqrt(T))
       PolanitzerBlack_76_Call = np.exp(-r*T)*(F*si.norm.cdf(d1,0.0,1.0)-X*si.norm.cdf(d2,0.0,1.0))
       return(PolanitzerBlack_76_Call)
```

```
[9]  PolanitzerBlack_76_Call(19,19,0.1,0.75,0.28)
```

```
1.701050725236268
```

קוד ה-Python שפיתח האקטואר רועי פולניצר עבור אופציית מכר (Put)

```
[10] import numpy as np
     import scipy.stats as si
     def PolanitzerBlack_76_Put(F,X,r,T,v):
       d1 = (np.log(F/X)+(0.5*v**2)*T)/(v*np.sqrt(T))
       d2 = (np.log(F/X)-(0.5*v**2)*T)/(v*np.sqrt(T))
       PolanitzerBlack_76_Put = np.exp(-r*T)*(X*si.norm.cdf(-d2,0.0,1.0)-F*si.norm.cdf(-d1,0.0,1.0))
       return(PolanitzerBlack_76_Put)
```

```
[11] PolanitzerBlack_76_Put(19,19,0.1,0.75,0.28)
```

```
1.701050725236268
```

משוואת ההפרשים החלקית (PDE) של Black-76

משוואת ההפרשים החלקית (PDE- Partial Differential Equation) שמאחורי נוסחת Black-76 הינה:

$$\left[\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial F^2}\sigma^2 F^2\right] dt = rc$$

למעשה נוסחת Black-76 היא פיתרון סגור (closed-form) ל- PDE המוטה לעיל בהינתן פונקציית התזרים (payoff function, תנאי הגבול) של אופציית ונילה.

פירמת הייעוץ שווי פנימי מסייעת ללקוחותיה לפתח וליישם מודלים מתקדמים הדורשים הבנה עמוקה בתהליכים סטוכסטיים, ידע בשיטות נומריות ושליטה ברמה גבוהה בשפות תכנות כגון : Python ו- R.

הצוות שלנו כולל מומחה לשוק ההון וניהול סיכונים בעל תארים בכלכלה ומימון (BA ו-MBA) עם ניסיון רב הן בפיתוח, יישום ותיקוף מודלים כמותיים.

האקטואר רועי פולניצר, בעל הסמכות מתקדמות בניהול סיכונים פיננסיים (CRM ו- FRM), מייעץ לחברות בניתוחים כמותיים מתקדמים בתחומים של הנדסה פיננסית, יישום מודל מונטה-קרלו, תהליכים סטוכסטיים ופתרון בעיות כמותיות באמצעות שיטות נומריות מתקדמות.

לאקטואר פולניצר שליטה בשפת התכנות וניתוח הנתונים Python, השלטת כיום בעולמות ה- Data, הכוללת את יסודות השפה (מנושאי תחביר פשוטים ועד מודולים ייחודיים לשפה זו), מה שהופך אותו למפתח Python לכל דבר ועניין, ברמה הנדרשת בתעשיה בכלל ובעולמות ה- Data בפרט. בנוסף, האקטואר פולניצר הינו מרצה בקורסים והשתלמויות מקצועיות של לשכת מעריכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל (IAVFA) בשפת Python.