הנדסה פיננסית באמצעות שפת Python: אופציות על מטבעות

ניתן להשתמש במודל של Garman and Kohlhagen (1983) שהתאים את מודל Black-Scholes לתמחור אופציות אירופאיות על מטבעות. המודל של Garman and Kohlhagen שקול אפקטיבית מכל הבחינו המתמטיות המהותיות למודל Merton (1973) שהוצג במאמרים הקודמים. ההבדל היחידי הוא שתשואת הדיבידנד מוחלפת בשיעור הריבית חסרת הסיכון של מטבע חוץ, r_f:

$$c = Se^{-r_f T}N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$$

$$p = Xe^{-rT}N(-d_2) - Se^{-r_f T}N(-d_1)$$

כאשר:

$$d_1 = \frac{ln(S/X) + \left(r - r_f + \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{ln(S/X) + \left(r - r_f - \sigma^2/2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

S = שווי נכס הבסיס.

X = מחיר המימוש של האופציה.

T = הזמן עד לפקיעה בשנים.

σ = התנודתיות של השינויים היחסיים במחיר נכס הבסיס.

r = שיעור הריבית חסרת הסיכון של המטבע המקומי.

r_f = בשיעור הריבית חסרת הסיכון של מטבע החוץ.

$N(x)$ = פונקצית ההתפלגות המצטברת הנורמלית סטנדרטית עד לנקודה x.

דוגמא

נניח אופציית אירופאית USD-call/EUR-put עם חצי שנה לפקיעה. שער החליפין USD/EUR הינו 1.56, מחיר המימוש הוא 1.6, שיעור הריבית חסרת הסיכון המקומי ב- EUR הוא 8% לשנה, שיעור הריבית חסרת הסיכון הזרה בארה"ב הוא 6% לשנה והתנודתיות היא 12% לשנה. לפיכך:

$$S = 1.56 \,, X = 1.6 \,, T = 0.5 \,, r = 0.06, r_f = 0.08, \sigma = 0.12$$

$$d_1 = \frac{ln(1.56/1.6) + (0.06 - 0.08 + 0.12^2/2)0.5}{0.12\sqrt{0.5}} = -0.3738$$

$$d_2 = d_1 - 0.12\sqrt{0.5} = -0.4587$$

על מנת לחשב את $N(\cdot)$ יש לייבא (Import) את ספריית scipy.stats ולהשתמש בפונקציית norm.cdf הנמצאת בספריה זו.

$$N(d_1) = N(-0.3738) = 0.3543 \quad N(d_2) = N(-0.4587) = 0.3232$$

$$c = 1.56e^{-0.08\times 0.5}N(d_1) - 1.6e^{-0.06\times 0.5}N(d_2) = 0.0291$$

פרמיית האופציה היא אפוא 0.0291 דולר ליורו. לחלופין, ניתן לצטט את הפרמיה ביורו לדולר כ- $0.0291/1.56^2 = 0.0120$ או כאחוז מהספוט, כ- $0.0291/1.56 = 0.0186538$ או 1.8654% של יורו (או מחיר הספוט). לפיכך, אם מכפיל נכס הבסיס של האופציה הוא 100 מיליון יורו, הרי שפרמיית האופציה תהיה 1,865,384.62 יורו, או $1.56 \times 1,865,384.62 = 2,910,000.00$ דולר.

קוד ה-Python שפיתח האקטואר רועי פולניצר עבור אופציית רכש (Call)

```
import numpy as np
import scipy.stats as si
def PolanitzerGarmanKohlhagen1983Call(S,X,r,rf,T,v):
  d1 = (np.log(S/X)+(r-rf+0.5*v**2)*T)/(v*np.sqrt(T))
  d2 = (np.log(S/X)+(r-rf-0.5*v**2)*T)/(v*np.sqrt(T))
  PolanitzerGarmanKohlhagen1983Call = S*si.norm.cdf(d1,0.0,1.0)*np.exp(-rf*T)-X*si.norm.cdf(d2,0.0,1.0)*np.exp(-r*T)
  print(PolanitzerGarmanKohlhagen1983Call)
```

```
PolanitzerGarmanKohlhagen1983Call(1.56,1.6,0.06,0.08,0.5,0.12)
```

```
0.029099253149439962
```

קוד ה-Python שפיתח האקטואר רועי פולניצר עבור אופציית מכר (Put)

```
import numpy as np
import scipy.stats as si
def PolanitzerGarmanKohlhagen1983Put(S,X,r,rf,T,v):
  d1 = (np.log(S/X)+(r-rf+0.5*v**2)*T)/(v*np.sqrt(T))
  d2 = (np.log(S/X)+(r-rf-0.5*v**2)*T)/(v*np.sqrt(T))
  PolanitzerGarmanKohlhagen1983Put = X*si.norm.cdf(-d2,0.0,1.0)*np.exp(-r*T)-S*si.norm.cdf(-d1,0.0,1.0)*np.exp(-rf*T)
  print(PolanitzerGarmanKohlhagen1983Put)
```

```
PolanitzerGarmanKohlhagen1983Put(1.56,1.6,0.06,0.08,0.5,0.12)
```

```
0.08298058174942868
```

משוואת ההפרשים החלקית (PDE) של Garman and Kohlhagen

משוואת ההפרשים החלקית (PDE- Partial Differential Equation) שמאחורי נוסחת Garman and Kohlhagen הינה:

$$\left[\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 c}{\partial S^2}\sigma^2 S^2+\left(r-r_f\right)\frac{\partial c}{\partial S}S\right]dt=rc$$

למעשה נוסחת Garman and Kohlhagen היא פיתרון סגור (closed-form) ל- PDE המונח לעיל בהינתן פונקציית התזרים (payoff function, תנאי הגבול) של אופציית ונילה.

פירמת הייעוץ שווי פנימי מסייעת ללקוחותיה לפתח וליישם מודלים מתקדמים הדורשים הבנה עמוקה בתהליכים סטוכסטיים, ידע בשיטות נומריות ושליטה ברמה גבוהה בשפות תכנות כגון: Python ו- R.

הצוות שלנו כולל מומחה לשוק ההון וניהול סיכונים בעל תארים בכלכלה ומימון (BA ו-MBA) עם ניסיון רב הן בפיתוח, יישום ותיקוף מודלים כמותיים.

האקטואר רועי פולניצר, בעל הסמכות מתקדמות בניהול סיכונים פיננסיים (CRM ו- FRM), מייעץ לחברות בניתוחים כמותיים מתקדמים בתחומים של הנדסה פיננסית, יישום מודל מונטה-קרלו, תהליכים סטוכסטיים ופתרון בעיות כמותיות באמצעות שיטות נומריות מתקדמות.

לאקטואר פולניצר שליטה בשפת התכנות וניתוח הנתונים Python, השלטת כיום בעולמות ה- Data, הכוללת את יסודות השפה (מנושאי תחביר פשוטים ועד מודולים ייחודיים לשפה זו), מה שהופך אותו למפתח Python לכל דבר ועניין, ברמה הנדרשת בתעשיה בכלל ובעולמות ה- Data בפרט. בנוסף, האקטואר פולניצר הינו מרצה בקורסים והשתלמויות מקצועיות של לשכת מעריכי השווי והאקטוארים הפיננסיים בישראל (IAVFA) בשפת Python.